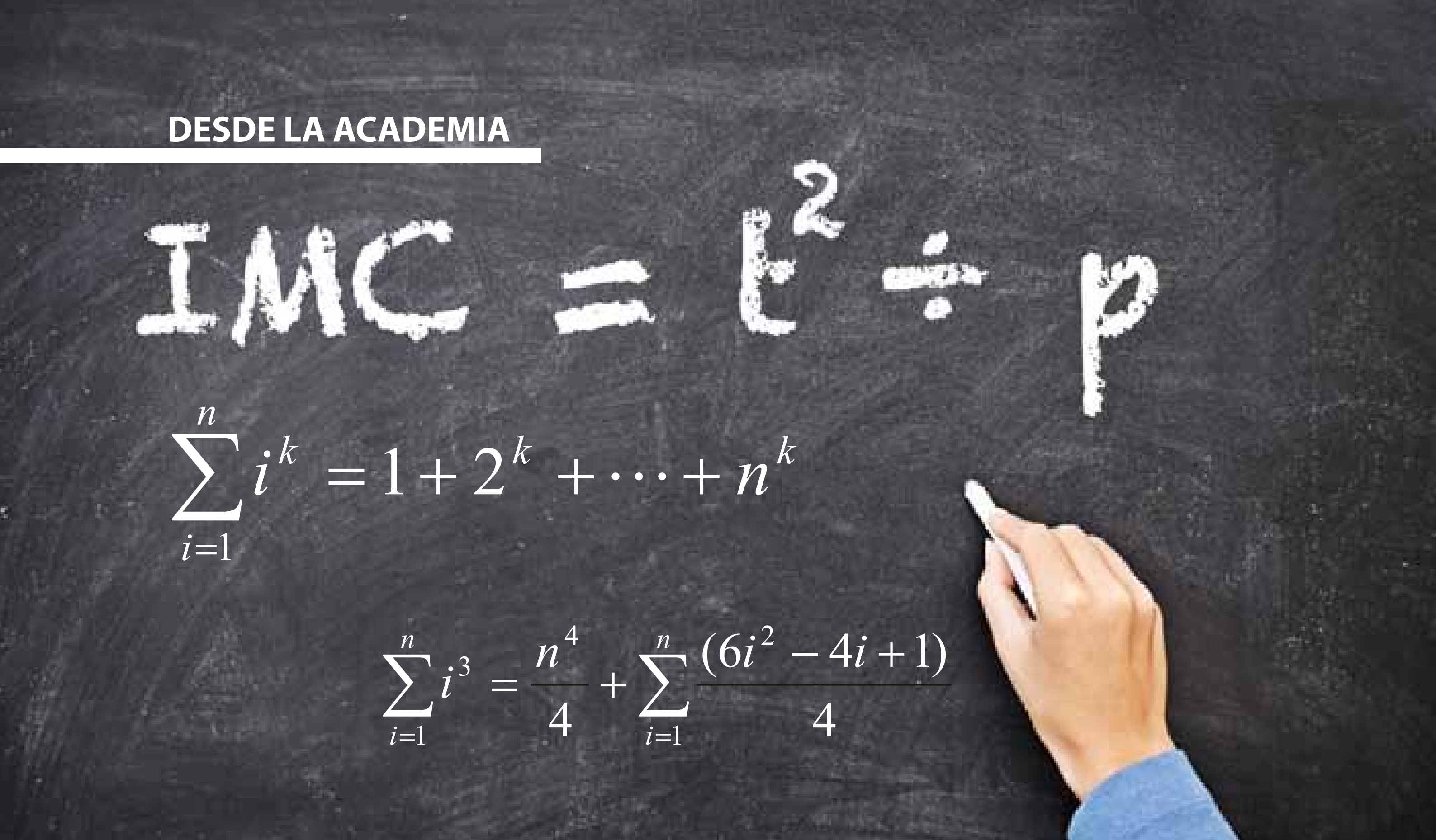


ECUACIÓN QUE OBTIENE CON BUENA APROXIMACIÓN LA SUMA DE LOS PRIMEROS ENTEROS A CUALQUIER POTENCIA ENTERA POSITIVA

LUIS MANUEL MONTAÑO ZETINA*

En este trabajo se presenta un análisis numérico para obtener un método sencillo que calcule la suma de los primeros enteros, de 1 hasta n, elevados a cualquier potencia entera k. El aspecto más importante durante el análisis fue la obtención de una expresión de sólo tres términos para calcular la suma final de manera precisa con una diferencia porcentual relativamente pequeña. Asimismo, se presenta un estudio de esta diferencia porcentual que compara la suma precisa y la exacta.

Dr. Luis Manuel Montaño Zetina
Departamento de Física, CINVESTAV
Correo: lmontano@fis.cinvestav.mx

*Autor para correspondencia: Luis Manuel Montaño Zetina
Correo electrónico: lmontano@fis.cinvestav.mx
Recibido: 2 de Septiembre de 2013
Aceptado: 6 de Noviembre de 2013
ISSN: 2007-4530

INTRODUCCIÓN

La teoría de números es una de las áreas más fascinantes de las matemáticas. Está llena de relaciones misteriosas entre los números enteros que han desafiado a las mentes más brillantes en el pasado y aún en la actualidad. Por ejemplo, la conjetura de Goldbach [4] (todavía no resuelta), el misterio de los números primos [1], el teorema de Fermat (resuelto hace menos de 20 años) [3], [5], entre muchos otros, son sólo algunos ejemplos de los trabajos que los matemáticos, y no sólo ellos, han dedicado toda su vida a resolver o al menos a dar una contribución significativa a la solución de cada uno de ellos.

Dentro del área de la teoría de números existen, las llamadas series o sumas de números enteros. Por ejemplo, una de las series más conocidas es la suma de los primeros enteros como se muestra abajo:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n,$$

la solución de la ecuación 1 es bien conocida: $n(n + 1)/2$.

Con esto, una pregunta natural que surge es: ¿Cuál es la solución para esta clase de serie para los casos en que los números enteros i están elevados a cualquier potencia entera k? Por ejemplo, para $k = 2$ la respuesta es también conocida: $n(n + 1)(2n + 1)/6$.

¿Existirá un método general para encontrar una solución para cualquier potencia k?

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = 1 + 2^k + \cdots + n^k$$

En la obra original de Jacob Bernoulli, su famoso tratado Ars Conjectandi [2] publicado en Basilea en 1713, ocho años después de su muerte, muestra la manera de obtener los polinomios que dan como resultado la suma de los primeros enteros a cualquier potencia k. Para obtener estos polinomios se necesitan calcular los llamados números de Bernoulli (B_n), los cuales se obtienen, entre otras maneras, con una ecuación encontrada por Euler:

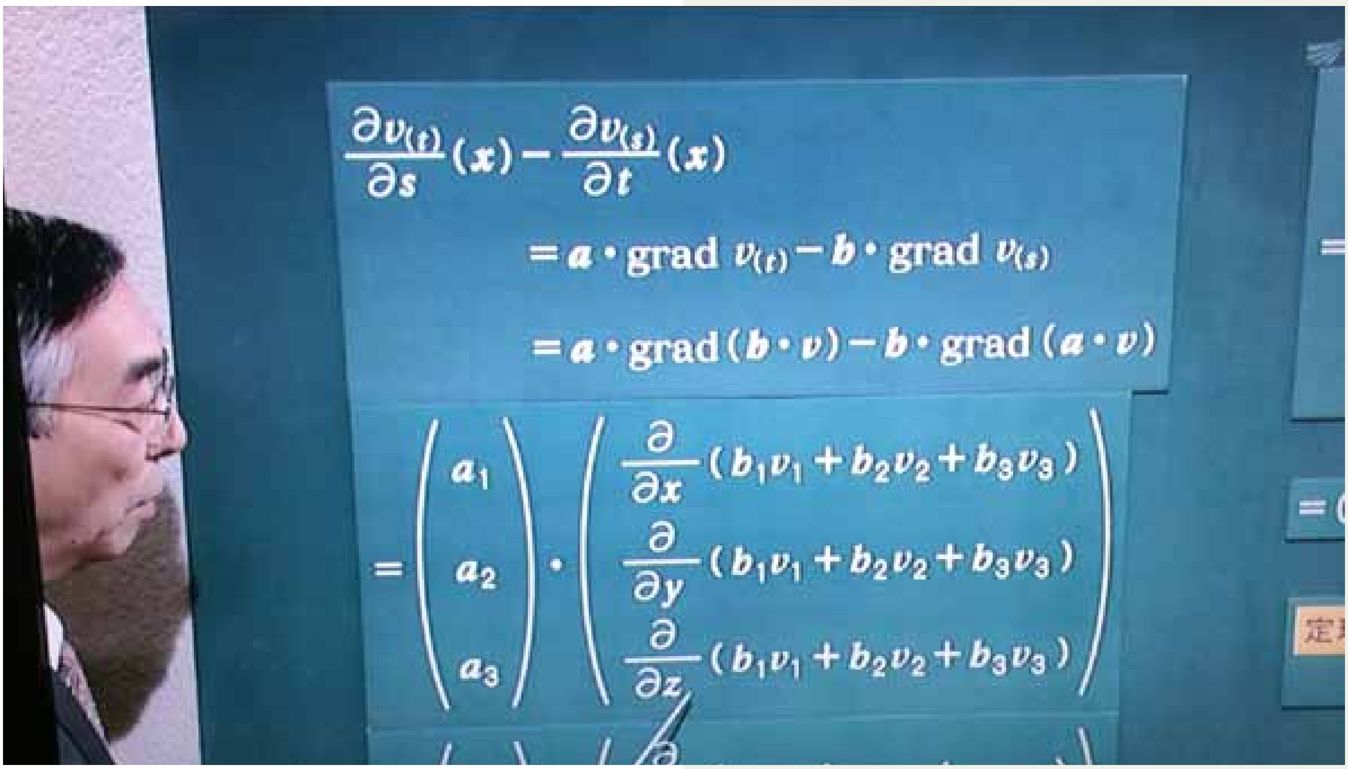
$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

Este trabajo está dividido de la siguiente manera: en la sección 2 se obtiene la expresión general para encontrar la suma de los primeros enteros para cada valor de k. Asimismo, se encuentra una expresión para obtener los coeficientes llamados F, equivalentes a los de Bernoulli. Posteriormente, en la sección 3 se describen algunas características de estos coeficientes F. En la sección 4 se propone una expresión simple para la solución general, ésta se compara con la solución exacta para estudiar la diferencia porcentual que existe entre ambas cantidades.

UNA EXPRESIÓN GENERAL PARA LA SUMA DE LOS PRIMEROS ENTEROS A UNA POTENCIA ENTERA *k*

Empecemos obteniendo una expresión general para la suma de los primeros enteros a cualquier potencia entera k. Nótese que:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[i^k - (i-1)^k \right] = n^k, \qquad (1)$$



lo que significa que todos los enteros, a excepción del último se cancelarán, es decir, quedará sólo el número n. Ahora, simplifiquemos esta expresión tomando el término $(i\text{-}1)^k$.

$$(i-1)^k = i^k - ki^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} i^{k-2} - \cdots + (-1)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-1)^l i^{k-l}. \qquad (2)$$

Desarrollando los primeros dos términos de la segunda parte de la ecuación (2) obtenemos:

$$(i-1)^k = i^k - ki^{k-1} + \sum_{l=2}^{k} \binom{k}{l} (-1)^l i^{k-l}. \qquad (3)$$

Introduciendo (3) en la ecuación (1) llegamos a:

$$\sum_{i=1}^{n} ki^{k-1} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=2}^{k} \binom{k}{l} (-1)^l i^{k-l} = n^k,$$

o, añadiendo 1 a k tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=2}^{k+1} \binom{k+1}{l} (-1)^l i^{k-l+1}. \qquad (4)$$

Cabe notar que el último término de esta ecuación está relacionado con el triángulo de Pascal. Así podemos construir cualquier solución particular para cada k tomando, salvo los dos primeros, todos los coeficientes de un renglón particular de este triángulo, alternando el signo, comenzando con el positivo. Por ejemplo, si queremos obtener la solución para el caso k=2 usando la ecuación (4) debemos hacer:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(3i-1)}{3}.$$

Desarrollando la suma de la parte derecha, y sabiendo la solución para el caso previo $k = 1$ la solución final es:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2+n}{2} - \frac{n}{3},$$

dando como resultado $n(n+1)(2n+1)/6$. Como se puede apreciar, se usó la tercera línea del triángulo de Pascal (1,3,3,1) excluyendo los dos primeros coeficientes y alternando el signo. Para ser aún más claros, abajo se muestra el caso con k=3 (recuérdese la cuarta línea del triángulo de Pascal (1,4,6,4,1).

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^4}{4} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(6i^2-4i+1)}{4}.$$

Por tanto uno puede ir adelante con este procedimiento para obtener cualquier solución; los requisitos son: saber la solución anterior de k y algo de álgebra.

En este punto es interesante saber si existe una ecuación simple para obtener todas las soluciones sin tener que pasar por los dos requisitos mencionados arriba, ya que será cada vez más difícil obtener el resultado al incrementarse el valor de k. Procedamos a desarrollar el último término de la ecuación (4):

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{k}{2!} \sum_{i=1}^{n} i^{k-1} - \frac{k(k-1)}{3!} \sum_{i=1}^{n} i^{k-2} + \ldots + \frac{n}{k+1} (-1)^{k+1} \qquad (5)$$

Podemos ver que para continuar con la búsqueda de una solución simple se tiene que sustituir la solución previa al segundo término de la segunda parte de la ecuación (5), la cual será de la misma estructura, pero con la potencia k-1. Sustituyendo este término obtenemos,

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{k}{2!}\left(\frac{n^k}{k} + \frac{k-1}{2} \sum_{i=1}^{n} i^{k-2} - \cdots + \frac{n}{k}(-1)^k \right) - \frac{k(k-1)}{3!} \sum_{i=1}^{n} i^{k-2} + \cdots + \frac{n}{k+1}(-1)^{k+1}$$

$$=\frac{n^{k+1}}{k+1}+\frac{n^k}{2!}+\left(\frac{k(k-1)}{4}-\frac{k(k-1)}{3!}\right)\sum_{i=1}^{n} i^{k-2}+\cdots+\frac{n}{k+1}(-1)^{k+1} \qquad (6)$$

Como se puede apreciar, existirán algunos coeficientes que multiplicarán las sumas de *i* elevada a la *k* menos 1, 2, 3, etc. Por ejemplo, en el caso de la potencia *k*-1 habrá dos coeficientes, para *k*-2 habrá cuatro. En general, habrá para la potencia k-*l*, 2^l coeficientes.

Entonces, sustituyendo todas las sumas de la misma estructura de la ecuación (5), obtendremos los valores de todos estos coeficientes. La estructura final de la suma es:

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{n^{k+1}}{k+1}+F_1 n^k + kF_2 n^{k-1} + k(k-1)F_3 n^{k-2} + \cdots + k!F_k n, \qquad (7)$$

donde las F_j son equivalentes a los números de Bernoulli, B_n.

Para obtener los valores de F_j se tendrían que desarrollar todos los términos y hacer sustituciones para cada caso. Para F_1 se vio que el valor era 1/2; el valor de F_2 se obtiene del paréntesis de la ecuación (6) y es igual a 1/12. F_3 es el resultado de la suma de las cuatro fracciones y F_4 de las ocho fracciones y así sucesivamente.

Una manera más inteligente de obtener todas las F_j es la siguiente: la ecuación (13) da solución para cualquier *n*, asimismo para *n*=1. Probemos esto con la primera de las F_j. Para *k*=1 en la ecuación (7) tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2}{2}+F_1 n \cdot$$

Para *n*=1 la suma es igual a 1. Entonces $1/2+F_1=1$ y $F_1=1/2$ como se obtuvo anteriormente. Ahora para *k*=2 tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3}+F_1 n^2 + 2F_2 n \cdot$$

De nuevo, para *n*=1 la suma es igual a 1. Entonces $1/3+F_1+2F_2=1$. Sabemos que $F_1=1/2$ por lo que $F_2=[1-(1/2+1/3)]/2=1/12$. Podemos proceder de esta manera para obtener todas las F_j. La estructura general para esta relación es:

$$F_k = \frac{1-\left(\frac{1}{k+1}+F_1+kF_2+k(k-1)F_3+\cdots+(k!/2)F_{k-1}\right)}{k(k-1)(k-2)\ldots(2)(1)}$$
$$= \frac{k}{(k+1)!}-\frac{\left(F_1+kF_2+k(k-1)F_3+\cdots+(k!/2)F_{k-1}\right)}{k!} \qquad (8)$$

Podemos expresar la ecuación (8) como:

$$F_m = \frac{m}{(m+1)!}-\sum_{l=0}^{m-2}\frac{F_{l+1}}{(m-l)!} \qquad (9)$$

En la ecuación (9) se sustituyó el índice *k* con la letra *m* con la finalidad de evitar confusiones con la expresión final dada en la ecuación (7).

Calculemos con la ecuación (9) las primeras tres F_m. Para la F_1 es claro que sólo se toma en cuenta el primer término, es decir, la sumatoria en este caso no participa. Por tanto, $F_1=1/(1+1)!=1/2$ como era de esperarse. Para F_2 participa el primer término de la ecuación y un término de la sumatoria, es decir, $F_2=2/(2+1)!- F_1/2!=1/3-1/4=1/12$. Para F_3 participan el primer término de la ecuación y dos términos de la sumatoria, es decir, $F_3=3/(3+1)!- F_1/3!- F_2/2!=1/8-1/12-1/24=0$. De esta manera obtenemos correctamente todos los coeficientes F_m necesarios dependiendo el valor de *k*.

Por tanto, la doble sumatoria presente en la ecuación (4) se puede expresar con la ecuación (7) reescrita abajo,

$$\sum_{i=1}^{n} i^{k} = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \sum_{m=1}^{k} \frac{k!}{(k-m+1)!} F_m n^{k-m+1}, \qquad (10)$$

donde las F_m están dadas por la ecuación (9).

Para mayor claridad en cómo aplicar ambas ecuaciones daremos un ejemplo para calcular la expresión completa para el caso k=7. Supondremos que ya se calcularon las F_m hasta la F_7 (ver en la siguiente sección la tabla 1) habiendo previamente calculado las seis F_m anteriores. Se procede por tanto con la ecuación (7).

$$\sum_{i=1}^{n} i^{7} = \frac{n^{8}}{8} + \sum_{m=1}^{7} \frac{7!}{(8-m)!} F_m n^{8-m}.$$

Desarrollando la suma se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n} i^{7} = \frac{n^{8}}{8} + F_1 n^7 + 7F_2 n^6 + 7\cdot 6F_3 n^5 + 7\cdot 6\cdot 5F_4 n^4 + \cdots + 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2F_7 n$$

Sustituyendo los valores de las F_m nos queda:

$$\sum_{i=1}^{n} i^{7} = \frac{n^{8}}{8} + \frac{n^{7}}{2} + \frac{7n^{6}}{12} - \frac{210n^{4}}{720} + \frac{2520n^{2}}{30240}$$

Rearreglando las fracciones a un mínimo común divisor obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} i^{7} = \frac{3n^{8} + 12n^{7} + 14n^{6} - 7n^{4} + 2n^{2}}{24},$$

siendo la expresión correcta.

CARACTERÍSTICAS DE LOS COEFICIENTES F_m

Como presentamos en la sección anterior, se redujo la ecuación (4) a dos ecuaciones, ambas con una sola suma. Para obtener los valores de todas las F_m se desarrolló un programa recursivo en lenguaje C++ con el cual se obtuvieron los valores que se muestran en la tabla 1.

Tabla 1. Valores de F_m para m=1,2,…,15.

m	F_m	F_m (fracción)
1	0.5	1/2
2	0.08333	1/12
3	0	0
4	-0.0013889	-1/720
5	0	0
6	0.00003306889	1/30240
7	0	0
8	-0.00000082672223	-1/1209600
9	0	0
10	0.000000020876888	-
11	0	0
12	-5.28419E(-10)	-
13	0	0
14	1.33825E(-11)	-
15	0	0

Se puede apreciar que los coeficientes F_m con índice impar, a excepción de F_1 son cero, como sucede con los números de Bernoulli. Pero, a diferencia con estos últimos, las F_m van siendo cada vez mucho menores que las precedentes, lo que no sucede con las Bs. Para mayor claridad se muestran los primeros números de Bernoulli en la tabla 2.

Tabla 2. Números de Bernoulli B_n para n=1,2,...,15.

n	Bn (fracción)
1	**1/2**
2	**1/6**
3	**0**
4	**-1/30**
5	**0**
6	**1/42**
7	**0**
8	**-1/30**
9	**0**
10	**5/66**
11	**0**
12	**-691/2730**
13	**0**
14	**7/6**
15	**0**

Por tanto, lo novedoso de esta manera de recalcular los coeficientes semejantes a los de Bernoulli es que podemos aproximar la solución exacta para cualquier n y k a una expresión sencilla y con una precisión que analizaremos más adelante. Esto es debido a que llegará un momento

Luis Manuel Montaño Zetina: UNISON / EPISTEMUS 15 / Año 7/ 2013/ pág.: 38-43

en que muchos de los términos de cualquier serie que se desee calcular, no contribuirán significativamente a la solución.

Tomando en cuenta esto, podemos observar que de todas las soluciones los primeros tres términos con potencias k+1, k y k-1 están siempre presentes. Posteriormente los siguientes términos n aparecen con potencias k-1 menos dos sucesivamente. Las funciones impares F_m que dieron cero explican este hecho.

También podemos notar que al incrementar el valor de k, los términos para cada solución aumentan. Por tanto, hacer el esfuerzo de encontrar una solución exacta valdrá la pena cuando exista el interés de saber la suma total para un valor de n relativamente grande. No tiene sentido obtener el resultado de la suma para un caso en el que, por ejemplo, n sea 4 elevado a la potencia k=10 usando la fórmula correspondiente. Sería más fácil sumar 1 a la 10, más 2 a la 10, y así sucesivamente en lugar de sustituir el valor n=4 y k=10 en la ecuación. Para el interesado en calcular alguna suma con n y k relativamente grandes, estas soluciones serán útiles para un valor grande de n y al menos dos veces mayor que el valor de la potencia k.

Tomando esto en cuenta y observando cada solución, vemos que los términos principales de cada una de ellas son los primeros tres, ya que el cuarto término es dos veces menor en orden de magnitud, aunado a que es multiplicado por un coeficiente relativamente pequeño (F_4). Asimismo sucede con los demás términos; son dos órdenes de magnitud menor y multiplicados por coeficientes cada vez mucho menores que los anteriores. Esto no sucede con los números de Bernoulli. Aunque aplicar este método con las F_m y como lo hizo Bernoulli con sus B_n dan la respuesta exacta para cada caso de k, es a través de las F_m como podemos proponer que los términos posteriores al tercero se pueden despreciar para obtener un resultado aproximado. Con los números de Bernoulli se tendría que ver cuanto contribuyen término a término para hacer este corte. Con esto hemos dado una buena aproximación para obtener la suma proponiendo otros coeficientes diferentes a los de Bernoulli. Esta es la contribución principal de este trabajo.

Por tanto, nos vemos tentados en estudiar qué tan cercano sería el resultado de la suma total con sólo estos tres términos a la suma total exacta. Entonces se procederá a cortar la serie para todas las soluciones anteriores a sólo los primeros tres elementos y calcular el grado de aproximación comparado con la suma real.

COMPARANDO LA SOLUCIÓN APROXIMADA CON LA EXACTA

Cuando se aplica este cálculo a otros valores de k, como arriba se hizo el ejemplo de k=7, se puede notar que, con excepción del primer caso k=1, cada una de las soluciones se puede obtener con la aproximación:

$$\sum_{i=1}^{n} i^k \cong \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{2} + \frac{kn^{k-1}}{12}, \quad (11)$$

que es el resultado de tomar sólo los primeros tres elementos de la ecuación 18. De nuevo, se realizó un programa en lenguaje C++ para calcular la solución aproximada y la exacta para compararlas. El resultado se ve en una gráfica que muestra la diferencia porcentual igual al valor aproximado menos el valor real todo dividido por el valor real multiplicado por 100. La gráfica la podemos ver en la Fig. 1.

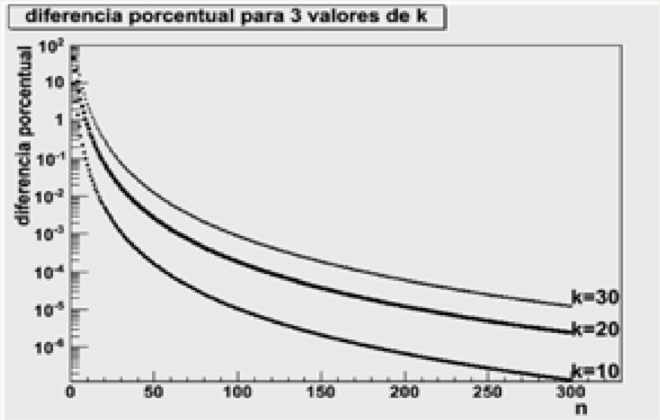


Figura 1. Diferencia porcentual para tres valores de *k=10, 20 y 30* y n=1 a 300.

Con esta comparación, se puede notar que para un valor relativamente grande de n la solución exacta *vs* la ecuación (11) difiere solamente por una milésima de por ciento o menos.

El lector puede programar en el lenguaje que desee la ecuación (9) y (10) para obtener la solución exacta y hacer sus propias comparaciones para otros casos. Con esto se apreciará, en tiempo máquina, como la solución aproximada es potente y rápida con un buen grado de precisión.

CONCLUSIONES

En este trabajo se encontró un método simple para obtener la soluciones para obtener la suma de los primeros enteros a cualquier potencia k. Aunque este método es equivalente al encontrado por Bernoulli junto con sus números B_n, tiene la ventaja que a través de las F_m se ve más clara la motivación de proponer un corte para cualquier caso k. Proponiendo la ecuación (11), se puede encontrar con muy buena aproximación el resultado de la suma para cualquier valor n y k, con una diferencia porcentual relativamente pequeña.

BIBLIOGRAFÍA

1) Derbyshire, J. (2003). *Prime obsession*. Plume Book.
2) Havil, J. (2003). *Gamma: exploring Euler's constant*. Princeton.
3) Singh, S. (1998). *El enigma de Fermat*. Planeta.
3) Stanley, O. y Anderson, T. (1988). *Excursions in number theory*. Dover.
5) Wiles, A. (1995). *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Annals of Mathematics No. 142, 443-551