



DINÁMICA DE UN PÉNDULO SOBRE MÓVIL: SIMULACIÓN Y EXPERIMENTO

HORACIO MUNGUÍA AGUILAR*,
ABRIL ARMENTA FRANCO, SERGIO GUTIÉRREZ LÓPEZ

RESUMEN

Se describen la simulación y el experimento de un péndulo sobre una plataforma móvil. Se muestra la instrumentación que ha permitido evaluar en el laboratorio el comportamiento dinámico real del sistema contrastando las mediciones con las predicciones de los modelos teóricos. Se muestran y discuten los resultados obtenidos.

Palabras clave: péndulo sobre carro; experimento con péndulo; péndulo móvil.

ABSTRACT

The simulation and the experiment of a pendulum on a moving platform are presented. It is shown the instrumentation used at the laboratory in order to assess the actual dynamic system behavior contrasting these with the predictions of theoretical models. The results are shown and discussed.

Keywords: Cart pendulum; pendulum experiment; mobile pendulum.

M.C. Horacio Munguía A.
Correo: hmunguia@correo.fisica.uson.mx
M.C. Abril Armenta Franco
Correo: a2f_171084@hotmail.com
M.C. Sergio Gutiérrez López
Correo: sgutier@fisica.uson.mx
Departamento de Física, Universidad de Sonora

*Autor para correspondencia: Horacio Munguía Aguilar
Correo electrónico: hmunguia@correo.fisica.uson.mx
Recibido: 8 de Octubre de 2013
Aceptado: 20 de Noviembre de 2013
ISSN: 2007-4530

INTRODUCCIÓN

El péndulo es un sistema clásico de mecánica ampliamente estudiado. El análisis de su dinámica no sólo resulta de interés académico, ya que permite introducir el movimiento armónico y los sistemas no-lineales, sino que presenta también una gran variedad de aplicaciones como en robótica, ingeniería civil, sistemas de navegación, instrumentación, etcétera. Existe una gran diversidad de sistemas pendulares: péndulo simple, péndulo doble, péndulo esférico, de masa variable, péndulo invertido, etcétera. El análisis de la dinámica del movimiento de estos sistemas no es trivial pues, en el caso más general, se tienen que emplear técnicas de análisis diferentes a las técnicas Newtonianas clásicas [1, 2].

Un problema todavía mayor en el estudio de los sistemas pendulares tiene que ver con la parte experimental. Preparar un experimento para estudiar la dinámica de un sistema como los pendulares no es sencillo. Normalmente estos sistemas requieren dos o más sensores de posición y/o velocidad para registrar en tiempo real los parámetros del experimento. Además, se debe disponer de un sistema de adquisición de datos rápido y con canales de entrada apropiados para recoger la información de los sensores sin perder detalles del evento. Esto explica por qué en la gran mayoría de los estudios de estos sistemas normalmente no se pasa del análisis teórico y, cuando mucho, de su simulación digital.

En este trabajo se presenta un estudio integral (teoría y experimento) de uno de estos sistemas de péndulo que poco se encuentra en la literatura: el péndulo sobre móvil. Existen varias versiones [3, 4] de este tipo de sistema. En la figura 1 se muestra el esquema del péndulo móvil que aquí se presenta. Consiste de un péndulo simple colgado de un poste que se encuentra fijo sobre una plataforma. Esta plataforma (el carro) es móvil y se puede deslizar sobre una superficie sin fricción en la dirección del eje x y sin desplazamiento vertical.

Las variables y parámetros del sistema son:

x : Abscisa del centro de masa del carro.
 y : Ordenada de la lenteja (masa del extremo) del péndulo.
 x : Abscisa de la lenteja del péndulo.
 θ : Ángulo de la varilla respecto a la vertical.
 m_1 : Masa de la lenteja del péndulo.
 m_2 : Masa del poste.
 m_3 : Masa de la varilla.
 M : Masa del carro.
 h : Altura total del sistema.
 H : Altura del carro.
 l : Longitud de la varilla.
 L_2 : Longitud del poste.
 b : Posición horizontal del centro de masa del sistema.

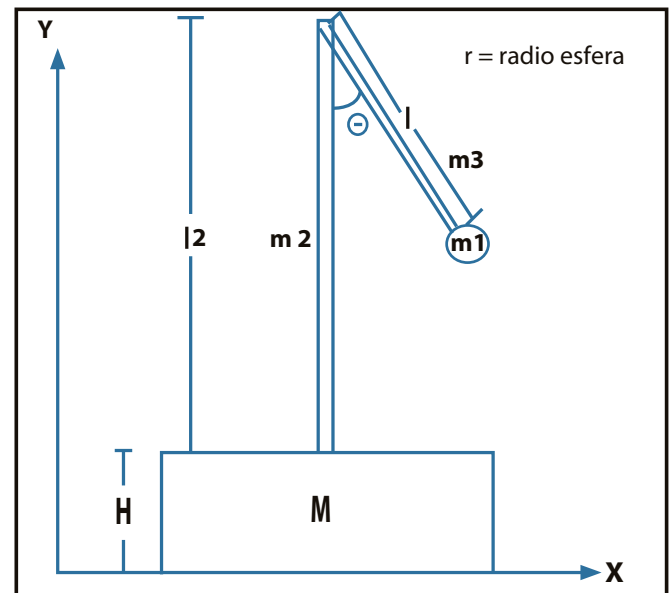


Figura 1. Esquema del péndulo móvil.





DINÁMICA DEL SISTEMA

Utilizaremos la formulación Lagrangiana de la Mecánica Clásica [5] para obtener las ecuaciones de movimiento del sistema. Bajo este formalismo escogemos como coordenadas generalizadas a \mathbf{x} (posición horizontal del carro) y θ (ángulo del péndulo) de la figura 1. Las ecuaciones de transformación entre estas coordenadas y las coordenadas cartesianas x , y de la lenteja del péndulo son:

$$1) x = X + l \sin \theta$$

$$2) y = h - l \cos \theta$$

De aquí resulta que las velocidades generalizadas son:

$$3) \dot{x} = \dot{X} + l\dot{\theta} \cos \theta$$

$$4) \dot{y} = l\dot{\theta} \sin \theta$$

Para tener una buena aproximación al sistema real, consideraremos al péndulo como un péndulo físico, es decir, tomaremos en cuenta las dimensiones de la varilla, de la lenteja del péndulo y del poste así como sus respectivas masas. Tomando como sistema de referencia la plataforma donde se desliza el sistema, el Lagrangiano L , definido como la diferencia entre la energía cinética T y la energía potencial U del sistema, es:

$$5) L = T_{carro} + T_{poste} + T_{barra} + T_{lenteja} - (U_{carro} + U_{poste} + U_{barra} + U_{lenteja})$$

$$L = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{X}^2 + \left[\frac{1}{2}m_3(\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2) + \frac{1}{2}I_b\dot{\theta}^2 \right] + \left[\frac{1}{2}m_1(\dot{x}_l^2 + \dot{y}_l^2) + \frac{1}{2}I_l\dot{\theta}^2 \right] - \left[Mg\frac{h}{2} + m_2g\left(h + \frac{l_2}{2}\right) + m_3g\left(l_2 + h - \frac{l}{2}\cos\theta\right) + m_1g\left(l_2 + h - (l+R)\cos\theta\right) \right]$$

En donde

$$6) x_b = X + \frac{l}{2} \sin \theta, \quad y_b = l_2 + h - \frac{l}{2} \cos \theta$$

Son las coordenadas cartesianas del centro de masa de la barra y

$$7) x_l = X + (l+r) \sin \theta, \quad y_l = l_2 + h - (l+r) \cos \theta$$

Son las coordenadas cartesianas del centro de masa de la lenteja.

Los momentos de inercia de la barra y de la lenteja, referidos a sus respectivos centros de masa son

$$8) I_b = \frac{1}{12} m_3 l^2$$

$$9) I_l = \frac{2}{5} m_1 r^2$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la expresión (5) se obtiene

$$10) L = \frac{1}{2}[M + m_1 + m_2 + m_3]\dot{X}^2 + \left[\frac{1}{2}lm_3 + m_1(l+r) \right] \dot{X}\dot{\theta} \cos \theta + \left[\frac{1}{6}l^2m_3 + \frac{1}{2}m_1\left(l^2 + \frac{7}{5}r^2 + 2lr\right) \right] \dot{\theta}^2 - g \left[m_2\left(h + \frac{l_2}{2}\right) + m_3\left(l_2 + h - \frac{l}{2}\cos\theta\right) + m_1\left(l_2 + h - (l+r)\cos\theta\right) \right]$$

De aquí se obtiene la primera ecuación de Lagrange del sistema:

$$11) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right) - \frac{\partial L}{\partial X} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[(M + m_1 + m_2 + m_3) \dot{X} + \left(\frac{1}{2} m_3 l + m_1 (l + r) \dot{\theta} \cos \theta \right) \right] = 0$$

La otra ecuación de Lagrange del sistema es

$$12) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\left[\frac{1}{2} m_3 l + m_1 (l + r) \right] \dot{X} \cos \theta + \left[\frac{1}{3} m_3 l^2 + m_1 (l + r)^2 + \frac{2}{5} m_1 r^2 \right] \ddot{\theta} + g \left[m_3 \frac{l}{2} + m_1 (l + r) \right] \sin \theta = 0$$

Derivando (11) y reordenando la ecuación anterior, obtenemos nuestras dos ecuaciones de movimiento:

$$13) \ddot{X} \cos \theta + \ddot{\theta} \frac{\left[l^2 \frac{m_3}{3} + m_1 \left(l^2 + \frac{7}{5} r^2 + 2lr \right) \right]}{\frac{1}{2} [lm_3 + 2m_1(l+r)]} + g \sin \theta \frac{\left[m_3 \frac{l}{2} + m_1 (l+r) \right]}{\frac{1}{2} [lm_3 + 2m_1(l+r)]} = 0$$

$$14) \ddot{X} [M + m_2 + m_3 + m_1] + \frac{1}{2} [lm_3 + 2m_1(l+r)] [\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta] = 0$$

Eliminando \ddot{X} se llega a:

$$15) \ddot{\theta} + \frac{1}{K - (\cos \theta)^2} \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{A}{K - (\cos \theta)^2} \sin \theta = 0$$

Donde las constantes **A** y **K** son:

$$16) A = \frac{g \left(m_3 \frac{l}{2} + m_1 (l + r) \right) (M + m_2 + m_3 + m_1)}{\frac{1}{4} [lm_3 + 2m_1(l+r)]^2}$$

$$K = \frac{\left[l^2 \frac{m_3}{3} + m_1 \left(l^2 + \frac{7}{5} r^2 + 2lr \right) \right] (M + m_2 + m_3 + m_1)}{\frac{1}{4} [lm_3 + 2m_1(l+r)]^2}$$

Resumiendo, las ecuaciones (13) y (14) describen el comportamiento del ángulo θ del péndulo y la posición x del carro. Estas ecuaciones no son lineales y su solución requiere un tratamiento numérico.

EL MODELO FÍSICO Y LA INSTRUMENTACIÓN

El péndulo móvil que se construyó, y que se muestra en la figura 2, está formado por una estructura metálica rectangular que sirve como la plataforma móvil que soporta al péndulo. Cuatro balines alojados en 2 canaletas paralelas sirven de rodamiento a la plataforma. Este sistema de rodamiento fue el que menor fricción ofreció de entre varios que se probaron, incluido un sistema de rodamiento con ruedas. Sobre esta base se erige una estructura vertical en forma de U invertida de donde cuelga el péndulo. El péndulo está montado directamente sobre el eje de un codificador óptico incremental y está hecho de una varilla de bronce. En su extremo se sujeta un balón de acero de 360 g de peso. El circuito que lee los sensores se coloca sobre la superficie del móvil. De aquí salen las conexiones para los codificadores y para la conexión serial a una computadora que almacenará los datos enviados por el circuito.

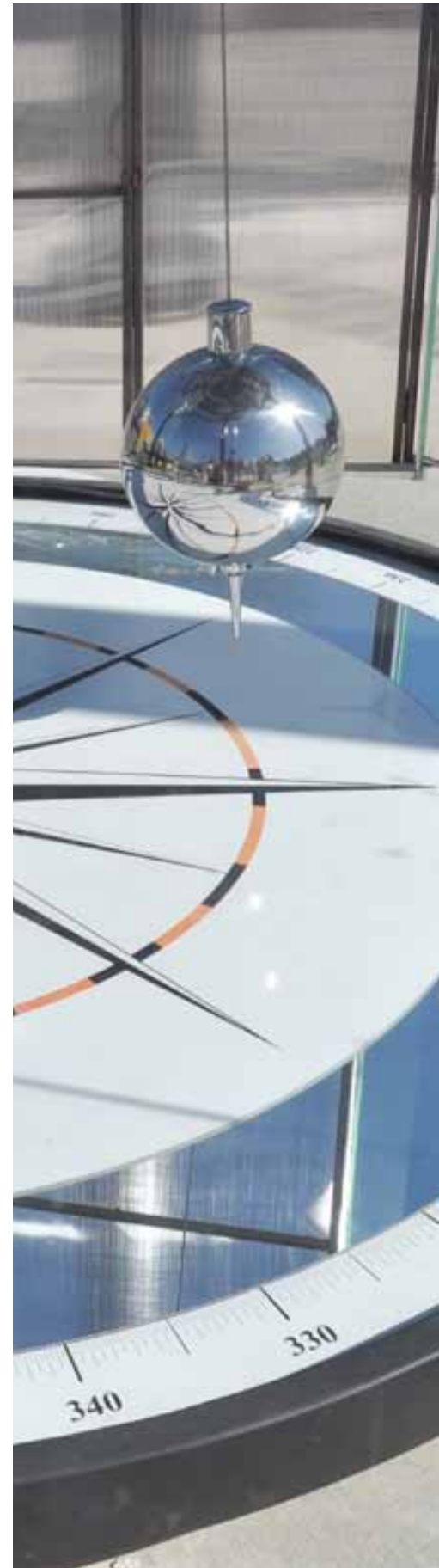




Figura 2. El péndulo móvil construido.

El sistema dispone de dos sensores: uno para la posición angular del péndulo y otro para la posición horizontal del carro. Los dos son de **USDigital** [6] del tipo óptico incremental modelo **H5S-512-IE**. El que mide la posición angular sirve de soporte al péndulo mismo ya que sobre su eje se acopla directamente la varilla. El otro codificador se encuentra en uno de los extremos de la base y es arrastrado en su movimiento. Este tipo de codificadores son de construcción robusta y de muy baja fricción. Su resolución es de 255 pulsos por revolución.

Los aspectos que se cuidaron en la construcción del péndulo-móvil son:

- Fricción mínima en el eje de giro del péndulo.
- Rigidez en el soporte vertical del péndulo.
- Firmeza y estabilidad en la plataforma del sistema.
- Fricción mínima en el desplazamiento del carro sobre la plataforma.

Las variables que tenemos que medir, almacenar y procesar con el fin de evaluar el comportamiento del sistema son el ángulo θ y el desplazamiento x del carro. La velocidad angular del péndulo y la horizontal del carro se pueden obtener secundariamente cuando conozcamos a $\theta(t)$ y $X(t)$. Por lo tanto, en nuestro experimento solo tenemos que medir directamente estos parámetros por medio de sus respectivos codificadores.

La medición del ángulo θ y del desplazamiento x no es un procedimiento sencillo puesto que se tiene que pasar por un proceso de conteo de pulsos -los generados por los sensores-. Con este objetivo se diseñó un circuito electrónico que realiza las siguientes funciones:

1. Recibe los pulsos de los sensores de posición angular y desplazamiento del carro y lleva su cuenta y dirección de giro.

2. Da formato a esta información para poder ser enviada secuencialmente.

3. Envía en forma inmediata y sincronizada estos datos a una computadora a través de su puerto serial.

Este circuito se desarrolló alrededor de un microcontrolador PIC16F876 de **Microchip** [5]. Véase la figura 3.



Figura 3. Interface péndulo-PC.

La parte más compleja del proceso se presenta en los puntos 1 y 2. Cada codificador tiene dos canales, A y B. La cantidad de pulsos generados en cada uno es la misma, pero se encuentran desfasados. La lectura de esta fase es la que da la dirección de giro. El programa del circuito está configurado para monitorear continuamente y a gran velocidad los canales A y B. Cuando se observa una transición 0-1 en el canal A inmediatamente se revisa el estado del canal B: si es bajo, se considera un avance en el sentido horario; si es alto, se considera un avance en el sentido anti horario. En el primer caso se incrementa el valor de un contador que contiene el acumulado de los pulsos anteriores; en el segundo caso el contador es decrementado.

En la computadora se dispone de un programa desarrollado en VB.NET que lleva a cabo las siguientes funciones:

- Presenta una interfaz gráfica al usuario que le permite controlar el experimento.
- Establece la comunicación con el puerto serial de acuerdo a los parámetros seleccionados.
- Guarda los datos recibidos en un formato preestablecido que facilitan su posterior procesamiento.

SIMULACIÓN

Las ecuaciones (13) y (14) fueron resueltas numéricamente empleando el software MATLAB de MathWorks [8]. Los valores de esta simulación para los parámetros m , M y l corresponden a los valores reales del modelo construido. Estos valores son

- $m_1 = 367.05 \text{ g}$
- $M+m_2 = 818.52 \text{ g}$
- $m_3 = 81.70 \text{ g}$
- $l = 30.9 \text{ cm}$
- $r = 2.22 \text{ cm}$

En la figura 4 se presentan las gráficas obtenidas en la simulación para el ángulo de giro del péndulo y la posición del carro. En la parte derecha se muestran las correspondientes velocidades: la angular del péndulo y la horizontal del carro. Se establecieron como condiciones iniciales un ángulo de 15.46° y una velocidad angular de cero para el péndulo. Para el carro, sus valores iniciales de posición y velocidad fueron cero.

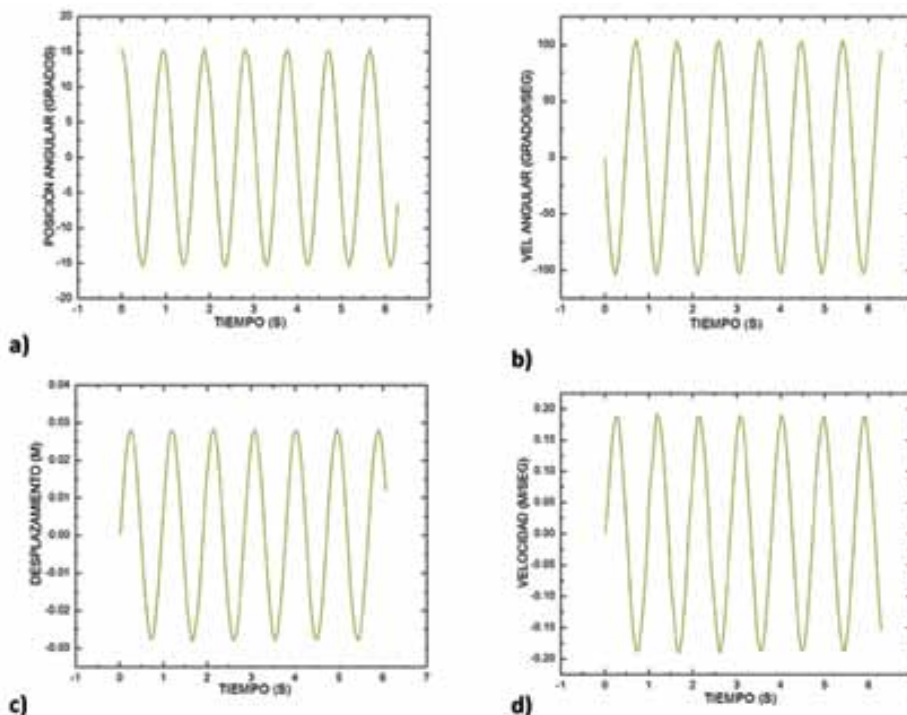


Figura 4. Resultados de la simulación: a) y b) Posición y velocidad angular para θ ; c) y d) Posición y velocidad de X.

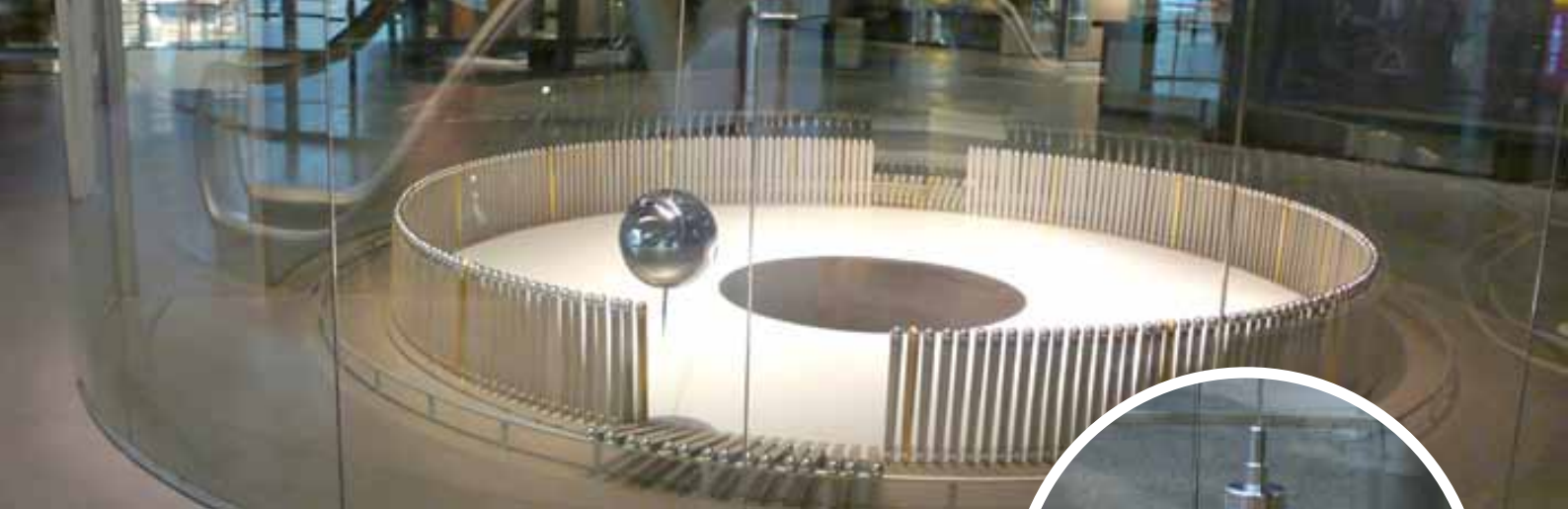
Resalta el hecho de que las oscilaciones del péndulo y el carro se dan en perfecta sincronía y con la misma frecuencia pero con un desfase de 180° (cuando el péndulo va en un sentido, el carro va por el sentido contrario). El valor de la frecuencia es de 1.064 Hz. Naturalmente, puesto que no se consideró fricción alguna, no se observa atenuación en el desplazamiento angular θ ni en la posición X.

EL EXPERIMENTO

Para llevar a cabo el experimento el sistema péndulo-móvil lo colocamos sobre una superficie perfectamente nivelada y lo más lisa posible para minimizar fricción. El proceso del experimento se realiza de la siguiente forma:

- Se posiciona el sistema en la superficie de tal forma que queden por los menos 50cm libres a ambos lados en la dirección del desplazamiento del sistema.
- Se inicializa el programa y se selecciona el número de muestras a adquirir en el campo señalado en la interfaz gráfica.
- Manteniendo fija la plataforma del móvil se levanta el péndulo hasta la posición de inicio deseada. No hay necesidad de medir el ángulo inicial con precisión ya que en la gráfica generada se le puede medir fácilmente.
- Se activa el control INICIO de la pantalla para iniciar el proceso de adquisición.
- Sin perder mucho tiempo se liberan el péndulo y la plataforma para permitir su libre movimiento.





• Cuando se han recogido todas las muestras el programa informa al usuario que la adquisición terminó y que el archivo de datos se encuentra disponible en la memoria de la PC. Este archivo de texto contiene 3 campos: el primero contiene el número de muestra, el segundo es el valor del ángulo θ y el tercero es el valor de la posición X .

El archivo generado se captura en una hoja de cálculo para su procesamiento: escalamiento, medición de frecuencia, generación de gráficas, etc.

Empleando el procedimiento anterior se realizaron 20 corridas del experimento y se recogieron sus correspondientes archivos de datos. Cada archivo se procesó con la hoja de cálculo **Excel**. Hay que recordar que los codificadores generan 255 por revolución por lo que cada pulso en el medidor de ángulo representa $360 \div 255 = 1.41^\circ$. En el caso del codificador que mide el desplazamiento, como ya se mencionó, se encuentra acoplado a una rueda de arrastre que tiene un diámetro de 34 mm; por lo tanto, por cada giro completo se recorre una distancia de $\pi \times 34 = 106.8$ mm. Esto significa que la sensibilidad en la medición de la posición es de $255 \div 106.8 = 2.39$ pulsos por mm.

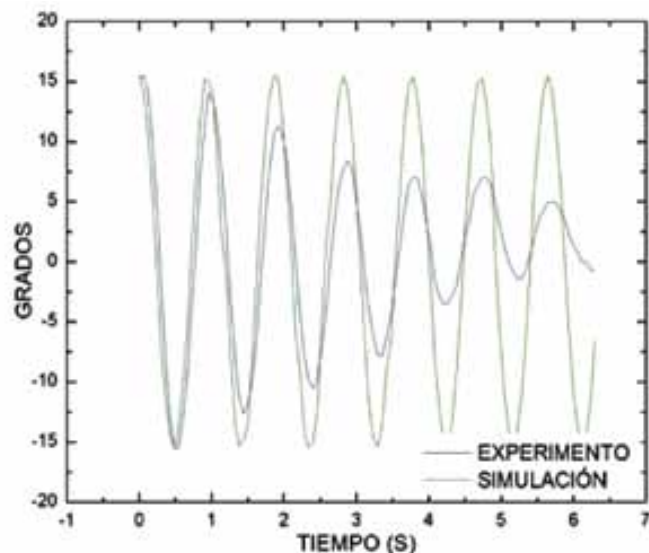


Figura 5. Posición angular del péndulo en el experimento y en la simulación.

Las figuras 5 y 6 muestran las gráficas típicas del ángulo θ y posición X que se obtuvieron en una de las corridas para un ángulo inicial de 15.5° . Se comparan con las curvas obtenidas en la simulación para este mismo ángulo. Los aspectos sobresalientes en estas gráficas son:

En el experimento se observa atenuación en la amplitud de los desplazamientos. En la simulación, como ya se vio, no se presenta atenuación.

La frecuencia de la oscilación en la simulación es de 1.06Hz y en el experimento es de $1.04\text{Hz} \pm 0.01$

Para diferentes ángulos iniciales empleados no se observa, ni en la simulación ni en el experimento, diferencias en la frecuencia de oscilación del péndulo. Esta frecuencia es la misma frecuencia que la del carro, solo que se encuentra desfasada. Es decir, la frecuencia de oscilación del sistema no depende del ángulo inicial, al menos no para ángulo menores de 40° . En la simulación numérica obtuvimos un valor para la frecuencia de oscilación de $f = 1.0637$ Hz y en el experimento obtuvimos un valor de $f = 1.04$ Hz con una desviación de ± 0.01 Hz. Esto significa una diferencia menor a 1.02%. Bastante razonable para un experimento de mecánica.

La discrepancia fundamental se observa en la amplitud de las oscilaciones. En la simulación numérica no se atenúan las oscilaciones. Permanecen constantes todo el tiempo. Esto es lógico porque supusimos que la fricción era nula. Por otra parte, según se observó en algunas corridas, a veces no hay simetría en los desplazamientos horizontales del sistema: se observa un sesgo en una dirección (positiva o negativa) del recorrido del móvil. Este fenómeno puede tener varias causas:

- 1) Insuficiente nivelación de la superficie.
- 2) Irregularidades en algunos puntos de la superficie.
- 3) Alguna obstrucción o desacomodo de los balines en las canaletas.

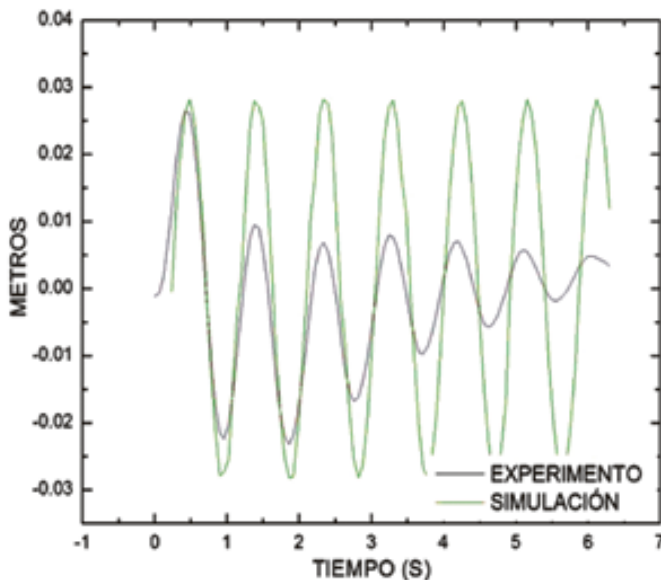


Figura 6. Desplazamiento del móvil en el experimento y en la simulación

Conclusiones

Se ha construido un péndulo físico que se desplaza sobre una plataforma móvil sobre el eje x . Se obtuvieron las ecuaciones que describen la dinámica de su movimiento y se resolvieron –simularon digitalmente- obteniéndose las gráficas de la posición angular del péndulo y la posición horizontal de la plataforma. De ahí se han obtenido también las correspondientes velocidades. Se realizó el experimento adquiriendo los datos de la posición angular θ y la posición X con una computadora través de un circuito interfase expresamente diseñado para este sistema. Al comparar los datos del experimento y la simulación se encuentra una buena correlación entre las frecuencias de oscilación. Las amplitudes difieren porque en la simulación no se consideró la fricción, lo cual conduce a que experimentalmente se obtenga un comportamiento tipo oscilador armónico amortiguado. Tanto en la simulación como en el experimento no se observa dependencia de la frecuencia de oscilación respecto al ángulo inicial, al menos para ángulos menores de 40° . Ángulos mayores a este valor desestabilizan al sistema pues levanta la plataforma de la superficie.

Este trabajo se puede continuar y mejor trabajando en dos puntos principalmente:

1) Medición experimental de la fricción habida entre la plataforma y la superficie para incorporarla en la simulación. Se puede probar, incluso, con otros sistemas de rodamiento.

1) Desarrollar un mejor mecanismo de lanzamiento del sistema que automatice las condiciones iniciales y mejorar la reproducibilidad del sistema.

REFERENCIAS

- 1) Karlheinz ,Ochz (2011), *A Comprehensive Analytical Solution of the nonlinear pendulum*, Eur. J. Phys. 32 (2011) 479–490
- 2) Lima, F.M.S. (2009), *A trigonometric approximation for the tension in the string of a simple pendulum accurate for all amplitudes*; Eur. J. Phys. 30 (2009) L95–L102
- 3) Thomas Peacock and Nicolas Hadjiconstantinou, course materials for 2.003J/1.053J Dynamics and Control I, Spring (2007). MIT OpenCourseWare (<http://ocw.mit.edu>), Massachusetts Institute of Technology.
- 4) Weibel, S. et al (1997), *Global Dynamics of a Rapidly Forced Cart and Pendulum*, Nonlinear Dynamics 13: 131–170.
- 5) L. D. Landau. (1976). *Mechanics, Third Edition: Volume 1*, Butterworth-Heinemann; ISBN: 0750628960,
- 6) US Digital, <http://usdigital.com/>
- 7) Microchip Technology, <http://www.microchip.com/>
- 8) MathWorks, <http://www.mathworks.com/products/matlab/>

