



ESTABILIZACIÓN ROBUSTA DE SISTEMAS LINEALES

HORACIO LEYVA CASTELLANOS*,
FRANCISCO ARMANDO CARRILLO NAVARRO

RESUMEN

En este trabajo se muestra un conjunto de resultados que permiten abordar el problema de la estabilización robusta de una familia de sistemas lineales positivos. Se describen dos nuevas aplicaciones en la teoría de control positivo para sistemas compartimentales y se muestra la aplicación de un teorema de robustez para tales sistemas.

Palabras clave: Robustez, Sistemas positivos, Sistemas compartimentales.

ABSTRACT

In this work we show a set of results that can address the problem of robust stabilization of a family of positive linear systems. We describe two new applications in the positive control theory compartmental systems and show the application of a theorem of robustness for such systems.

Keywords: Robustness, Positive systems, Systems compartment.

M.C. Horacio Leyva Castellanos
Correo: hleyva@gauss.mat.uson.mx
Dr. Francisco Armando Carrillo Navarro
Correo: carrillo@gauss.mat.uson.mx
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

*Autor para correspondencia: Horacio Leyva Castellanos
Correo electrónico: hleyva@gauss.mat.uson.mx,
Recibido: 30 de Septiembre de 2013
Aceptado: 21 de Noviembre de 2013
ISSN: 2007-4530

INTRODUCCIÓN

Muchos modelos económicos, físicos, biológicos, etcétera, involucran cantidades que se representan mediante variables positivas. Por ejemplo, la concentración de sustancias, el nivel de líquidos en tanques, la biomasa de una población, etc. Estos ejemplos pertenecen a la clase de sistemas positivos, donde las variables de estado y las condiciones iniciales son no negativas [2]. En tales sistemas también pueden considerarse controles positivos, por ejemplo en reactores y bioprocesos la acción de control está relacionada a caudales cuyo valor es estrictamente positivo. En este trabajo consideramos una familia de sistemas que satisfacen las hipótesis de la teoría de estabilidad para sistemas positivos, tales como los teoremas de Frobenius-Perron para matrices Metzler y el teorema de Gerschgorin aplicado a matrices compartimentales.

Consideremos el sistema lineal positivo con control positivo

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (1)$$

donde $x \in \mathbf{R}_+^n$ y $u \in [r_1, r_2] \subset \mathbf{R}_+$. Bajo tales condiciones de positividad para (1), presentamos un conjunto de resultados que permiten asegurar la existencia de equilibrios y la estabilidad robusta de tales soluciones de (1) contenidas en el cono positivo \mathbf{R}_+^n .

SISTEMAS POSITIVOS

Considere el sistema lineal homogéneo en tiempo continuo

$$\dot{x} = Ax, \quad (2)$$

donde $x \in \mathbf{R}^n$ y $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$. A continuación damos definiciones de conceptos con los que trabajaremos.

Definición 1. El sistema (2) es positivo si para cada $x(t_0) = x_0 \in \text{int}(\mathbf{R}_+^n)$, $t \geq 0$ sucede que la solución correspondiente $x(t; t_0, x_0) \in \text{int}(\mathbf{R}_+^n)$, para toda $t \geq t_0$.

Definición 2. La matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es Metzler si $a_{ij} \geq 0$ para $i \neq j$.

Definición 3. La matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es metzleriana si $a_{ij} \geq 0$ para $i \neq j$, y $a_{ii} < 0$.

Similarmente, una matriz intervalo $\mathbf{A} := \{A \in \mathbf{R}^{n \times n} : 0 \leq \bar{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq a_{ij}^+, \text{ para toda } i, j\}$, se dice que es matriz intervalo metzleriana, si cada matriz $A \in \mathbf{A}$ es una matriz metzleriana.

Es conocido que el sistema (2) es positivo si y sólo si A es Metzler. A este tipo de sistemas se les denomina positivos porque el cono positivo \mathbf{R}_+^n es un conjunto invariante, ver [4].

Definición 4. La matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es Hurwitz si todos sus valores propios tienen parte real negativa.

EL TEOREMA DE FROBENIUS-PERRON PARA MATRICES METZLER

Teorema 1. Sea A una matriz Metzler. Entonces, existen un número real μ_0 y un vector

$x_0 \geq 0$ tales que se cumple lo siguiente:

i) $Ax_0 = \mu_0 x_0$, y

ii) Si $\mu \neq \mu_0$ es cualquier otro valor propio de la matriz A , entonces $\text{Re}(\mu) < \mu_0$.

Existen resultados para las matrices Metzler que establecen que para cualquier matriz Metzler A , su inversa $-A^{-1}$ existe y es positiva, si y sólo si, todos sus valores propios están dentro del semiplano complejo izquierdo (valores propios con parte real estrictamente negativa), i.e., matrices Metzler que son a su vez son Hurwitz. El siguiente teorema asegura que la estabilización de la dinámica controlada ocurra en \mathbf{R}_+^n .

Teorema 2. Sea $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ una matriz Metzler. La inversa $-A^{-1}$ existe y es positiva si, y sólo si, A es Hurwitz (i.e., $\mu_0 < 0$).

La prueba de los teoremas 1 y 2 pueden verse en [4] y [5].

APLICACIÓN AL MODELO DE MEZCLAS EN n TANQUES

Definición 4. La matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es compartimental si se cumplen las dos siguientes condiciones:

a) A es Metzler,

b) $\sum_i a_{ij} \leq 0$ para cada columna $j = 1, 2, \dots, n$.

Tenemos que el sistema lineal (1) es de compartimiento si se cumple que A es compartimental, $b \geq 0$ y $u \geq 0$.

Consideremos una línea de n tanques conectados cada uno con su antecesor y su sucesor, es decir para el i -ésimo tanque, éste recibirá dos flujos f_{2i-1} y f_{2i} , y a su vez dará dos flujos f_{2i-2} y f_{2i+1} del y para el $(i-1)$ -ésimo e $(i+1)$ -ésimo tanque respectivamente, para $i = 1, 2, \dots, n$ (Figura 1). Es claro, que el tanque 1, recibirá un flujo f_1 con cierta concentración u , mientras que el tanque n desfogará al exterior un flujo f_{2n} . Tal configuración, nos lleva a un sistema del tipo (1). Donde

$$A = \begin{pmatrix} -f_3 & f_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_3 & -a_{22} & f_4 & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & f_{2i-1} & -a_{ii} & f_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & f_{2n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{2n-1} & -a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

con $a_{22} = f_2 + f_3$, $a_{ii} = f_{2i-2} + f_{2i+1}$ y $a_{nn} = f_{2n-2} + f_{2n+1}$, para



$i = 1, 2, \dots, n$ y $b = (1, 0, \dots, 0)^T$ Como el volumen en cada tanque se considera constante, deberán cumplirse las ecuaciones

$$f_{2i-1} + f_{2i} = f_{2i-2} + f_{2i+1}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n., \quad (4)$$

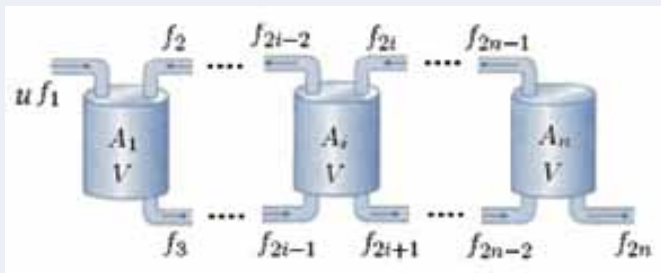


Figura 1. En esta configuración de tanques, se considera el volumen V constante.

EL CASO DE MEZCLA CON DOS TANQUES

En esta parte analizamos el caso $n = 2$ (dos tanques), de la sección anterior. La descripción del problema es el siguiente:

Dos tanques, A y B , contienen V_1 y V_2 litros de salmuera y en los cuales se disolvieron inicialmente a y b libras de sal respectivamente. Ambos tanques están conectados, habiéndose un flujo f_2 de salmuera del tanque A al B y un flujo f_3 del tanque B al A . Además, del exterior hay un flujo f_1 con u libras de sal por litro hacia el tanque A , y del tanque B hay un flujo f_4 hacia el exterior. Deseamos determinar la cantidad de sal presente en cada tanque en el instante t .

Denotando por $x_1(t)$ y $x_2(t)$ las cantidades de sal presentes al instante t en los tanques A y B respectivamente, el modelo matemático matricial es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{V_1} & \frac{f_3}{V_2} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_2}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (5)$$

con condiciones iniciales $x_1(0) = a$ y $x_2(0) = b$, de manera que el objetivo es estabilizar rápidamente las concentraciones $\frac{x_i}{V_i}$ de cada uno de los tanques. Si queremos que V_i sea constante para $i = 1, 2$, entonces

$$f_2 = f_3 + f_4 \quad \text{y} \quad f_1 = f_4 \quad (6)$$

Donde la matriz de coeficientes A es Metzler, cuyos valores propios son de la forma

$$\lambda_{1,2} = \frac{-f_2(V_1 + V_2) \pm \sqrt{D}}{2V_1V_2} \quad (7)$$

donde $D = f_2^2(V_2 - V_1)^2 + V_2V_1f_3f_2$. De (6) tenemos que $f_3 < f_2$, de modo que la expresión

$$\begin{aligned} D &< f_2^2(V_2 - V_1)^2 + V_1V_2f_2^2 \\ &= f_2^2(V_1 + V_2)^2 \end{aligned}$$

por consiguiente $-f_2(V_1 + V_2) + \sqrt{D} < 0$, esto es que A es matriz Hurwitz. De acuerdo al teorema de Frobenius-Perron para matrices Metzler, tenemos que el punto de equilibrio \bar{x} es positivo y asintóticamente estable, i.e.,

$$\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u} = \bar{u} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Entonces, u es quien determina la cantidad de sal en cada tanque. La dinámica es sencilla, al aplicar un control constante \bar{u} , cualquier solución que inicie en \mathbf{R}^2 tiende asintóticamente al punto de equilibrio $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$.

EL MODELO DE LA INSULINA

Hasta ahora se han propuesto varios modelos matemáticos para la dinámica glucosa-insulina en la terapia de la diabetes tipo 1; sin embargo el modelo de Sorensen es uno de los más aceptados por su completez en la representación del metabolismo de la glucosa, con un enfoque compartimental [11]. El uso del modelo de Sorensen para propósitos de control se ha discutido en [12]; ahí se presenta una breve discusión acerca de la estructura del modelo. El modelo se divide en tres subsistemas: glucosa, insulina y razones de glucagón metabólico. El subsistema de la glucosa es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales en ocho dimensiones, mientras que el subsistema de la insulina es lineal en siete dimensiones. Ambos sistemas están acoplados por el subsistema no lineal de razones de glucagón metabólico. Es importante observar que el modelo de Sorensen ya ha sido validado y los parámetros involucrados son conocidos.

Un enfoque típico del control de glucosa en la terapia de la diabetes tipo 1, consiste en diseñar una función $u(t)$ para controlar la medida de la señal de salida de ésta, es decir, la concentración de glucosa en el tejido vascular periférico (en la piel). El objetivo de control sobre la concentración de glucosa se alcanza por el suministro exógeno de insulina en la ruta subcutánea (señal de control) definido por el diseño de $u(t)$. En este artículo se propone una estabilización del subsistema de la insulina. Esta intención, obedece a la necesidad de controlar la infusión de insulina; esto es que, no es suficiente obtener la concentración de glucosa sobre tasas fisiológicas normales, sino que se debe controlar la infusión de insulina con que se logra esta normalización de la concentración de la glucosa, con el fin de reducir los excesos en las dosis de la aplicación de la insulina para prevenir una hiperinsulinemia y con ello un coma diabético.

Aquí se propone un algoritmo para el control de la insulina, basado en una estabilización rápida de un sistema lineal de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -1.73x_1 + 1.73x_2 \\ \dot{x}_2 &= 0.454x_1 - 3.151x_2 + 0.909x_4 + 0.727x_5 + 1.06x_6 \\ \dot{x}_3 &= 0.765x_2 - 0.765x_3 \\ \dot{x}_4 &= 0.094x_2 + 0.378x_3 - 0.789x_4 \\ \dot{x}_5 &= 1.411x_2 - 1.835x_5 \\ \dot{x}_6 &= 1.418x_2 - 1.874x_6 + 0.455x_7 \\ \dot{x}_7 &= 0.05x_6 - 0.111x_7, \end{aligned} \quad (9)$$

donde, x_i , para $i = 1, \dots, 7$, es la concentración de insulina



en el cerebro, las arterias, intestinos, hígado, riñón, venas periféricas (piel), compartimentos de órganos periféricos, respectivamente. Este subsistema es usado para diseñar un control estabilizante de acuerdo a la metodología usada de manera estándar. El problema de estabilización supone la infusión de insulina exógena en el tejido subcutáneo, esto es, que la ecuación de balance de masa de concentración de insulina en las venas periféricas \dot{x}_6 es modificado por la adición de la entrada u , de tal manera que el sistema de ecuaciones diferenciales (9) queda de la forma:

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

donde la matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} -1.3 & 1.73 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.454 & -3.151 & 0 & 0.909 & 0.727 & 1.06 & 0 \\ 0 & 0.765 & -0.765 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.094 & 0.378 & -0.789 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.411 & 0 & 0 & -1.835 & 0 & 0 \\ 0 & 1.418 & 0 & 0 & 0 & -1.874 & 0.455 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & -0.111 \end{pmatrix} \quad (10)$$

el $x = (x_1, x_2, \dots, x_7)^T$ vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_7)^T$, el vector $bu = (0, 0, 0, 0, 0, 1.418u, 0)^T$.

Al fijar un valor aceptable de \bar{u} , obtenemos el punto de equilibrio

$$\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u},$$

donde las entradas de \bar{x} representan niveles aceptables de insulina en los órganos respectivos. Por ejemplo, si $\bar{u} = 23.349$, entonces $\bar{x}^T = (21.379, 21.379, 21.379, 12.789, 16.439, 32.152, 14.483)$.

ROBUSTEZ DE LA ESTABILIDAD DE UNA FAMILIA DE SISTEMAS LINEALES

Cabe la pregunta, si los valores nominales de las componentes de la matriz A corresponden al sistema real (el cuerpo humano del insulino dependiente); cualquier aseveración sobre la estabilidad del sistema puede verse alterada si modificamos una de las entradas. En esta sección mostramos un resultado de robustez para una familia de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Decimos que un sistema lineal del tipo (1) es Hurwitz estable si la matriz es Hurwitz, por ejemplo el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

es Hurwitz estable ya que la matriz es Hurwitz (tiene valores propios $-3 \pm \sqrt{6}$), implicando que para cualquier condición inicial x_0 , la solución correspondiente $x(t, x_0)$, es tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = 0$. El resultado de robustez que aplicamos aquí es para los sistemas lineal del tipo (1) con matriz A Metzleriana, una clase particular de matrices Metzler.

$$\mathbf{A} := \{ A \in \mathbf{R}^{n \times n} : a_{ij}^- \leq a_{ij} \leq a_{ij}^+, \text{ para toda } i, j \}$$

Usando las matrices de cota superior e inferior

$$A^- := \begin{pmatrix} a_{11}^- & \cdots & a_{1n}^- \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^- & \cdots & a_{nn}^- \end{pmatrix}, \quad A^+ := \begin{pmatrix} a_{11}^+ & \cdots & a_{1n}^+ \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^+ & \cdots & a_{nn}^+ \end{pmatrix},$$

un elemento $A \in \mathbf{A}$ puede denotarse como:

$$A^- \leq A \leq A^+.$$

Teorema 3. Una matriz Metzleriana $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es Hurwitz estable para toda $A \in [A^-, A^+]$ si y sólo si A^+ es Hurwitz estable. Una condición equivalente es que todos los menores principales de $-A^+$ son positivos. Es decir, $\det[-A^+(\alpha)] > 0$ para $\alpha = 1, \dots, n$.

Usando el teorema 3 para tener un tipo de robustez del sistema lineal (9), al aumentar ligeramente las entradas no nulas de A , obtenemos la matriz

$$A^+ = \begin{pmatrix} -\frac{171}{100} & \frac{18}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{31}{10} & 0 & 1 & \frac{73}{100} & \frac{11}{10} & 0 \\ 0 & \frac{77}{100} & -\frac{76}{100} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{4}{10} & -\frac{78}{100} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{18}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{185}{100} & \frac{46}{100} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$



donde A^+ es Hurwitz, ya que los menores principales de $-A^+$ son positivos (al ser fracciones no hay errores de redondeo al calcular los determinantes):

$$\det[-A^+(1)] = \frac{171}{100}, \quad \det[-A^+(2)] = \frac{4401}{1000}, \quad \det[-A^+(3)] = \frac{83619}{25000}, \quad \det[-A^+(4)] = \frac{2440341}{1250000},$$

$$\det[-A^+(5)] = \frac{60102567}{25000000}, \quad \det[-A^+(6)] = \frac{718468299}{500000000}, \quad \det[-A^+(7)] = \frac{8052561}{156250000}.$$

Definamos la matriz $C = [c_{ij}]$, con $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ij} \neq 0, \\ 0 & \text{si } a_{ij} = 0, \end{cases}$ es decir,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

el teorema 3 nos asegura que (el intervalo de matrices) la matriz $A + \varepsilon C$ es Hurwitz para todo $\varepsilon \in (-0.05, 0.005)$, es decir, $-0.05 < \varepsilon < 0.005$, donde podemos considerar que

$$A^- := A + (-0.05)C = \begin{pmatrix} -1.78 & 1.68 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.404 & -3.201 & 0 & 0.859 & 0.677 & 1.01 & 0 \\ 0 & 0.715 & -0.815 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.044 & 0.328 & -0.839 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.361 & 0 & 0 & -1.885 & 0 & 0 \\ 0 & 1.368 & 0 & 0 & 0 & -1.924 & 0.405 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.161 \end{pmatrix},$$

donde la entrada $\bar{a}_{76} = 0$.

Concluimos esta sección observando que el sistema lineal

$$\dot{x} = (A + \varepsilon C)x,$$

es estable si $\varepsilon \in [-0.05, 0.005]$ y se estabilizan en el punto de equilibrio

$$\bar{x} = - (A + \varepsilon C)^{-1} b \bar{u}.$$

Para algunos sistemas positivos del tipo (1) es posible determinar un intervalo de matrices, de manera que un intervalo "grande" significa "más robustez" en la estabilidad del sistema. Como ejemplo, si $x_1(t) = e^{at}$ y $x_2(t) = e^{bt}$, con constantes $a < b < 0$, se dice que $x_1(t)$ tiene una mayor tasa de estabilización (converge más rápido al valor cero) que $x_2(t)$.

A partir de este punto, podemos plantearnos objetivos como el establecido por la siguiente pregunta:

¿Es posible incrementar la tasa de estabilización

(rapidez de convergencia) en \bar{x} al considerar $u \in [r_1, r_2]$ en lugar del valor constante $u = \bar{u}$?, ¿es posible cambiar la dirección de la convergencia en el espacio de estado?

Puede probarse que los sistemas positivos (1) son no controlables (no es posible conducir todas las soluciones de (1) mediante funciones $u(x) \geq 0$), pero es posible elegir (con restricciones) el punto de equilibrio \bar{x} , así como aumentar la tasa de estabilización y elegir la dirección (en el espacio de estados) de la convergencia al punto de equilibrio. En [13] y [14] presentamos un método para estabilizar una familia de sistemas positivos del tipo (1) mediante la teoría de modos deslizantes.

CONCLUSIONES

Mediante resultados conocidos de la teoría de control, sistemas lineales positivos y teoremas de estabilidad, mostramos una manera de analizar y diseñar una estabilización robusta de una familia de sistemas lineales.

BIBLIOGRAFÍA

- 1) Horacio Leyva C., Julio Solis-Daun (2009). Synthesis of positive controls for the global CLF stabilization of systems, Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, Shanghai, P.R. China, December 16-18, 2009.
- 2) Ait Rami, M. and Tadeo, F. (2007). Controller Synthesis for Positive Linear Systems With Bounded Controls, IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs, Vol. 54, No. 2, February.
- 3) Leenheer, P.D. and Aeyels, D. (2001). Stabilization of positive linear systems, Systems Control Lett., 44: 259-271.
- 4) Bellman, R. (1970). Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill, New York.
- 5) Berman, A., Neumann, M. and Stern, I. (1989). Nonnegative matrices in the Dynamics Systems. John-Wiley, New York.
- 6) Luenberger, D.G. (1979). Introduction to Dynamic Systems. John Wiley, New York.
- 7) Brammer, R.F. (1972). Controllability in linear autonomous systems with positive controllers. SIAM J. Control, 10.
- 8) Farina, L. y Rinaldi, S. (2000). Positive Linear Systems: Theory and applications. John Wiley & Sons.
- 9) Bhattacharyya, S. P., Chapellat, H., Keel, L.H. (1995). Robust Control, The Parametric Approach, by Prentice Hall PTR.
- 10) Gallardo H., A.G., et al. (2013). High-order sliding-mode control for blood glucose: Practical relative degree approach. Control Engineering Practice. Recuperado el 27 de Noviembre de 2013 en: <http://dx.doi.org/10.1016/j.conengprac.2012.11.01>
- 11) Sorensen, J.T. (1985). A Physiologic Model of Glucose Metabolism in Man and its Use to Design and Assess Improved Insulin Therapies for Diabetes I. PhD Thesis MIT, USA.
- 12) Quiroz, G. and Femat, R. (2007). On hyperglycemic glucose basal levels in Type 1 Diabetes Mellitus from analysis. Mathematical Biosciences 210, 554-575.
- 13) Leyva, H., Carrillo, F., Quiroz, G. y Femat, R. (2013). Estabilización vía Modos Deslizantes con Control Positivo. Memorias del Congreso Nacional de Control Automática AMCA 2013.
- 14) Leyva, H., Quiroz, G., Carrillo, F. y Femat, R. (2013). Rapid insulin stabilization via sliding modes control for T1DM therapy. Memorias del Congreso Nacional de Control Automática AMCA 2013.